Quadrature n° 77 (2010) 15–18

DOI: 10.1051/quadrature/2010007

[MATh.en.JEANS]

Trouver la sortie ?

par Vanessa Abalo, Maximilien Burq, Lola Guillot, Emmanuel Lecouturier et Thomas Williams

Résumé.
Ce texte est l'exposé de l'équipe MATh.en.JEANS mixte entre le lycée Blaise Pascal (Orsay) et l'université Paris-Sud 11. Les jeunes auteurs développent une solution pour un problème géométrique à deux joueurs puis simulent ces résultats informatiquement.

Considérons un jeu à deux joueurs **A** et **B** : **A** cherche à sortir d'un domaine plan défini préalablement où **B** cherche à le maintenir ; à chaque tour, **A** choisit une direction dans laquelle il va se déplacer, puis **B** choisit le sens du déplacement. Enfin, **A** avance d'un pas p fixé dans le sens et la direction choisis.

Voici les questions considérées autour de ce jeu :

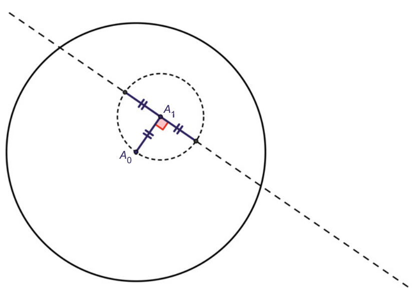
– Existe-t-il une stratégie pour que le joueur **A** parvienne à sortir de n'importe quel ensemble ? Si oui, peut-on obtenir une stratégie optimale ?
– Quel est le comportement asymptotique des résultats précédents lorsque le pas p tend vers 0 ?

I Jeu dans un disque

Pour commencer, étudions le cas simple où le domaine de jeu est un disque de centre O et de rayon R. Supposons initialement **A** en $A_0 = O$ et notons A_n la position de **A** à la n-ième étape.

I.1 Méthode de l'angle droit

Décrivons une stratégie toujours gagnante pour **A**, la méthode de l'angle droit : initialement, **A** choisit une direction au hasard, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, **A** prend, à l'étape $n + 1$, une direction perpendiculaire à (OA_n).



Direction prise par **A** à la deuxième étape.

Proposition 1. *Quelle que soit la stratégie du joueur **B**, la méthode de l'angle droit permet au joueur **A** de sortir du disque.*

Démonstration. En effet, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OA_nA_{n+1}, on a $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + p^2$. D'où, par une récurrence immédiate, $OA_n^2 = np^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, si $n \geq \left\lfloor \frac{R^2}{p^2} \right\rfloor + 1$, alors $OA_n > R$, ce qui signifie que **A** est sorti du disque à l'étape n. □

Nous avons donc démontré que le nombre minimal d'étapes nécessaire à **A** pour sortir du cercle est majoré par $\left\lfloor \frac{R^2}{p^2} \right\rfloor + 1$. Montrons que cette stratégie est en fait optimale.

Proposition 2. *La méthode de l'angle droit est optimale.*

Démonstration. Notons α_n l'angle $\angle OA_{n-1}A_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de Al-Kashi dans le triangle $OA_{n-1}A_n$,

$$OA_n^2 = OA_{n-1}^2 + p^2 - 2\cos(\alpha_n) \times p \times OA_{n-1}.$$

Comme le joueur **B** choisit le sens de déplacement, il peut toujours s'assurer un cas défavorable pour **A**, c'est-à-dire $\alpha_n \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos(\alpha_n) \geq 0$. D'où

$$OA_n^2 \leq OA_{n-1}^2 + p^2.$$

Ainsi, si **B** joue de manière optimale, **A** a intérêt à choisir $\alpha_n = \frac{\pi}{2}$ de sorte à maximiser la distance à l'origine et sortir. En conclusion, la stratégie qui consiste à choisir $\alpha_n = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire la méthode de l'angle droit, est optimale. □

Remarquons enfin que, si p tend vers 0, $\left\lfloor \frac{R^2}{p^2} \right\rfloor + 1$ tend vers $+\infty$ donc le nombre d'étapes pour sortir du cercle devient infiniment grand.

I.2 Méthode de l'angle limite

Toujours dans le cas où le domaine est un disque, nous allons étudier le cas où **B** adopte une autre stratégie en choisissant le sens avec une même probabilité $\frac{1}{2}$ et où **A** choisit un angle α_n tel que $\cos(\alpha_n) = \frac{p}{2OA_{n-1}}$. Alors, le théorème de Al-Kashi donne

$$OA_n^2 = \begin{cases} OA_{n-1}^2 + p^2 - 2OA_{n-1} \times p \times \cos(\alpha_n) \\ \quad \text{avec une probabilité } \frac{1}{2}\,; \\ OA_{n-1}^2 + p^2 + 2OA_{n-1} \times p \times \cos(\alpha_n) \\ \quad \text{avec une probabilité } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

D'où $OA_n^2 = OA_{n-1}^2$ ou $OA_n^2 = OA_{n-1}^2 + 2p^2$.

Avec cette méthode, parfois le joueur **A** avancera « beaucoup » et parfois il n'avancera pas du tout. Ce que nous voulons savoir c'est si l'avance que prend **A** lorsqu'il avance « beaucoup » compense les fois où il n'avance pas. En moyenne, **A** va s'éloigner autant du centre qu'avec la méthode de l'angle droit.

En conclusion, si **B** choisit le sens du déplacement au hasard avec une probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque sens, au bout d'un grand nombre de pas, le nombre de petits pas et le nombre de grands pas effectués par **A** vont s'équilibrer. **A** ne va donc pas sortir plus vite avec cette méthode.

I.3 Méthode de la droite

Hypothèse. *On suppose dans cette section que $p = 1$ afin de simplifier les calculs.*

Considérons les stratégies suivantes :

- le joueur **B** va choisir, comme précédemment, un sens aléatoire avec une même probabilité pour chacun des deux sens ;
- le joueur **A**, lui, se déplace toujours sur une même droite passant par l'origine.

Intuitivement, on se doute qu'il est possible de sortir en exactement R pas, avec toutefois une probabilité très faible, mais qu'il est également possible de « tourner » autour de l'origine et donc de ne jamais sortir. C'est pourquoi nous avons décidé de regarder si, en moyenne, cette méthode est meilleure que celle de l'angle droit. Pour cela, on note X_n la variable aléatoire correspondant à l'abscisse de **A** à la n-ième étape, l'axe des abscisses étant choisi comme la droite sur laquelle se déplace **A**.

Proposition 3. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,*

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n+k}{2}} & \text{si } k = n[2]\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de raisonner par récurrence avec la relation

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k+2). \qquad \square$$

Maintenant, nous aimerions savoir si cette méthode est meilleure que celle de l'angle droit. Pour cela, nous allons calculer la distance moyenne à l'origine à laquelle se trouve **A** à l'instant R^2. Si cette distance est supérieure à R, alors cela veut dire qu'en moyenne **A** sort en moins de R^2 pas. Dans ce cas, la méthode de la droite permettrait en moyenne de sortir plus vite qu'avec la méthode de l'angle droit. L'espérance $\mathbb{E}(OA_{R^2}) = \mathbb{E}(X_{R^2})$ est alors

$$\mathbb{E}(OA_{R^2}) = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k=R[2]}}^{R^2} k \frac{1}{2^{R^2}} \binom{R^2}{\frac{R^2+k}{2}}.$$

Malheureusement, nous n'avons pas réussi à obtenir une expression suffisamment simple de cette quantité pour pouvoir prouver qu'elle minorait, en valeur absolue, systématiquement R ; néanmoins, de nombreux calculs numériques avec des valeurs explicites de R nous laissent conjecturer que c'est toujours le cas.

Voici, par exemple, quelques valeurs :

R	$\mathbb{E}(OA_{R^2})$
5	$\simeq 4,03$
6	$\simeq 4,75$
7	$\simeq 5,61$
8	$\simeq 6,36$

En conclusion, la méthode qui consiste à se déplacer toujours dans la même direction semble bien moins efficace que la méthode de l'angle droit.

II Jeu dans un autre domaine

Maintenant le cas du cercle résolu, on peut affirmer que quel que soit le domaine de jeu, **A** peut sortir puisqu'il suffit à **A** de sortir d'un cercle qui contient cet ensemble. Mais la stratégie de la perpendiculaire reste-t-elle optimale ?

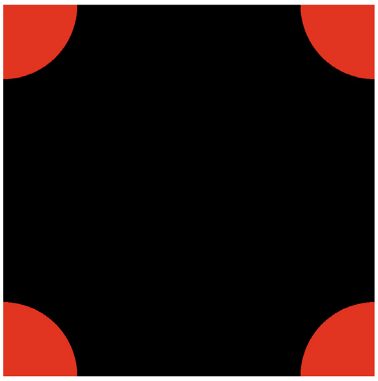
II.1 Illustrations informatiques

Consacrons-nous au cas où le domaine de jeu est un carré.

Définition 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La zone d'indice n est l'ensemble des points du carré d'où **A** peut sortir en au plus n étapes quels que soient les choix de **B**.

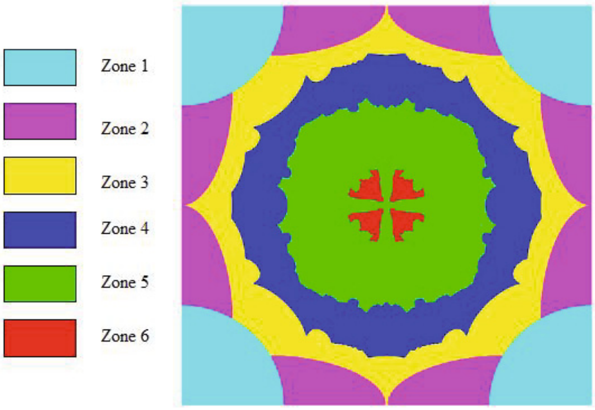
En fait, pour que **A** puisse sortir en un coup, il faut et il suffit que **A** soit au milieu d'un segment de longueur $2p$ dont les extrémités sont en dehors du carré.

On en déduit que la zone 1 est délimitée par les quarts de cercle de rayon p et de centre les sommets du carré.



Zone 1 en rouge. (Figure en couleur disponible sur www.quadrature-journal.org/.)

Pour construire les zones suivantes, on utilise un programme informatique. Voici alors les résultats pour le carré :



(Figure en couleur disponible sur www.quadrature-journal.org/.)

Le nombre de zones nécessaire pour couvrir le carré donne un majorant du nombre de coups minimum qu'il faut à **A** pour sortir du carré. Ce nombre de coups minimum est compris entre le nombre de coups nécessaire pour sortir du cercle inscrit au carré et le nombre de coups nécessaire pour sortir du cercle circonscrit au carré. On peut remarquer sur l'exemple précédent qu'en étant au centre du carré, on se situe dans la zone 5 alors qu'un peu à côté du centre, on se trouve dans la zone 6. On peut donc sortir plus vite du centre du carré que de certains points près de ce centre (qui constituent la zone 6 sur l'exemple). Ce résultat n'est pas un défaut du programme, contrairement à ce qu'on pourrait croire en raisonnant trop sommairement.

On remarque alors que sortir du cercle circonscrit au carré n'est pas une stratégie optimale pour **A** puisque sur l'exemple proposé, **A** peut sortir en 7 coups du carré, alors qu'un rapide calcul montre qu'il faut 8 coups à **A** pour sortir s'il sort du cercle circonscrit avec la stratégie de la perpendiculaire.

La notion de zone se généralise à tout ensemble et un programme permet de tracer les zones pour n'importe quel domaine, comme ci-dessous l'exemple d'un domaine elliptique.

Ensemble des zones d'une ellipse. (Figure en couleur disponible sur www.quadrature-journal.org/.)

II.2 Pseudo-code informatique

Indiquons rapidement les algorithmes (implémentés en C) permettant d'obtenir les résultats ci-dessus.

Pour modéliser un domaine d'au plus w pixels de largeur et h pixels de hauteur, on considère un tableau `nbPas` de taille $w + 2 * d$, $h + 2 * d$ (où la distance d est évaluée en pixels). Ce tableau contient un 0 dans chaque case correspondant à un point à l'extérieur de la figure, et une valeur *infinie* dans chaque case correspondant à un point du domaine (en réalité, il suffit d'un entier strictement supérieur au nombre de pas maximum pour sortir du domaine). Les pixels en trop servent de marge, pour qu'on n'ait pas à se soucier de la situation aux bords dans les calculs suivants.

La procédure suivante permet, à partir d'un tableau où l'on a marqué les zones 1 à `nEtape` (c'est-à-dire tous les points depuis lesquels on peut sortir en `nEtape` ou moins), de marquer tous les points de la zone `nEtape`+1 (c'est-à-dire les points depuis lesquels on peut sortir en exactement `nEtape`+1 étapes). Rappelons que l'on ne peut sortir en `nEtape`+1 étapes à partir d'un point que s'il existe une direction telle que quel que soit le sens choisi par le joueur **B**, on arrive à un point à partir duquel on peut sortir en `nEtape` ou moins. C'est pourquoi on parcourt le demi-cercle de centre le point qui nous intéresse.

```
procédure marquerPointsZone(nEtape):
soit pointsModifies = 0
pour x entre d et w+d
    pour y entre d et h+d
        si nbPas[x][y] vaut Infini
        (le point n'a pas encore été
        marqué)
           soit C un demi cercle de
           rayon d et de centre (0,0)
           pour chaque point (a,b) de C :
             si nbPas[x-a][y-b]
             <= nEtape et nbPas[x+a][y+b]
             <= nEtape
                 alors mettre nEtape+1
                 dans nbPas[x][y]
                 incrémenter
                 pointsModifies
                 arrêter de parcourir C
              sinon, essayer le point
              de C suivant
        sinon, passer au point suivant
renvoyer la valeur de pointsModifies
```

Ensuite, pour déterminer le nombre de pas pour sortir du domaine depuis chaque point, on répète la procédure `marquerPointsZone` jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de points à marquer.

```
procédure calculerZones:
soit casesAMarquer le nombres de cases
de nbPas qui contiennent la valeur Infini
soit nEtapes = 0
tant que casesAMarquer ne vaut pas 0
    exécuter marquerPointsZones(nEtape)
    et récupérer le résultat
    pointsModifies soustraire
    pointsModifies à casesAMarquer
```

Pour éviter de faire des calculs lourds dans le code le plus répété, à l'intérieur de la boucle de `marquerPointsZone`, on précalcule un cercle de rayon d et l'on n'a plus qu'à effectuer des translations.

Remerciements. Nous remercions notre professeur de mathématiques, Didier Missenard, pour nous avoir encadré au club MATh.en.JEANS du lycée Blaise Pascal d'Orsay.